Колыхалов Г. А., Кравченко Е. Г.
G. A. Kolykhalov, E. G. Kravchenko

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ В ДИАПАЗОНЕ ЧИСЕЛ $100 < Re < 3 \cdot 10^6$

INVESTIGATION OF FLUID DYNAMICS AND HEAT TRANSFER OF A FLAT PLATE IN THE NUMBER RANGE $100 < Re < 3 \cdot 10^6$

Колыхалов Геннадий Антонович – начальник научно-исследовательского отдела Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: kolykhalov40@mail.ru.
Gennady A. Kolykhalov – Head of Research Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: kolykhalov40@mail.ru.

Кравченко Елена Геннадьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Машиностроение» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: ek74@list.ru.
Elena G. Kravchenko – PhD in Engineering, Assistant Professor, Mechanical Engineering Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: ek74@list.ru.

Аннотация. Исследована возможность использования модели пограничного слоя Л. Прандтля для получения приближённых аналитических решений для ряда задач гидродинамики и теплообмена в диапазоне чисел $100 < Re < Re_{кр}$ в предположении, что критическое число $Re_{кр} = 3 \cdot 10^6$ для плоской пластины. Модель предусматривает сохранение всех членов в уравнениях Навье – Стокса, записанных в форме вихревой напряжённости и теплообмена, и их линеаризацию в конвективной части. Дано решение двух задач обтекания плоской пластины в режимах гидродинамического и теплового взаимодействия потока с обтекаемым телом. Получены приближённые аналитические решения для вихревой напряжённости и теплообмена в диапазоне чисел $100 < Re < Re_{кр}$. Математически показано возникновение резких скачков вихревой напряжённости (касательных напряжений) и температуры в точке перехода ламинарного течения в турбулентное. Решения проведены в предположении, что течение стационарное, а плотность, вязкость, температуропроводность среды не зависят от температуры.

Summary. The possibility of using L. Prandtl's boundary layer model to obtain approximate analytical solutions for a number of problems of hydrodynamics and heat transfer in the range of numbers $100 < Re < Re_{кр}$ under the assumption that the critical number $Re_{кр} = 3 \cdot 10^6$ for a plane plate is investigated. The model assumes the conservation of all terms in the Navier-Stokes equations, written in the form of vortex tension and heat transfer, and their linearization in the convective part. A solution of 2 problems of flow around a plane plate in the modes of hydrodynamic and thermal interaction of the flow with the streamlined body is given. Approximate analytical solutions for vortex tension and heat transfer in the range of numbers $100 < Re < Re_{кр}$. The occurrence of sharp jumps in vortex tension (shear stresses) and temperature at the point of transition of laminar flow into turbulent flow is mathematically shown. The solutions are based on the assumption that the flow is steady, and the density, viscosity, and thermal transmittance of the medium do not depend on the temperature.

Ключевые слова: модель, пограничный слой, пластина, гидродинамика, теплообмен, вихревая напряжённость, скачок, трение, энергия, диссипация, турбулизация, критерии Re, Pr.

Key words: model, boundary layer, plate, fluid dynamics, heat transfer, vortex tension, jump, friction, energy, dissipation, turbulence, criterias Re, Pr.

УДК 532.526.2:536.24

Серьёзные успехи в развитии научных исследований в сфере механики жидкости и газа, в первую очередь в историческом плане, оказались возможными с появлением модели пограничного слоя [1], созданной Л. Прандтлем.

Физическая интерпретация модели позволяет поле течения разделить на внешнее, невозмущённое течение без трения, т. е. свободное от вращения частиц, и пограничный слой (внутреннее, возмущённое течение), в котором проявляется интенсивное вращение частиц, т. е. возникают силы трения.

Математическая интерпретация модели определяет, что граничные условия назначаются не на бесконечности, а на внешней границе конечного по своей величине пограничного слоя и, соответственно, на поверхности обтекаемого тела.

С математической стороны модель описывается упрощёнными уравнениями Навье – Стокса, полученными в соответствии с представлениями теории подобия и моделирования [2]. Упрощение основано на том, что в уравнениях Навье – Стокса отбрасываются члены, на порядок и более меньшие оставленных. Критерием оценки порядка величин является отношение толщины пограничного слоя δ к характерному размеру тела l:

$$\frac{\delta}{l} < 0{,}1.$$

Под характерным размером l в зависимости от поставленной задачи будет пониматься или конечная длина пластины, или, в случае бесконечной пластины, расстояние от передней кромки пластины до точки, где ламинарное течение переходит в турбулентное. Для других тел характерным размером может быть, например, диаметр (для сферы и цилиндра), продольная длина или размах крыла (для летательного аппарата) и т. д.

Упрощение уравнений обусловлено тем, что использование полных, нелинейных уравнений Навье – Стокса и теплообмена [1] для получения аналитических решений не представляется возможным ввиду их чрезвычайной сложности, и до настоящего времени не найдены методы их интегрирования в общем виде. Это обстоятельство вынуждало исследователей искать решение проблемы на путях изучения предельных случаев, где оказалось возможным для определённых классов задач существенно упростить уравнения Навье – Стокса и теплообмена и, соответственно, привести их к виду, удобному для интегрирования [3–5].

Недостаток рассматриваемой модели пограничного слоя заключается в том, что она позволяет решать задачи в пределах изменения числа Рейнольдса $2500 < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ для плоской пластины, здесь $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ – критическое число Рейнольдса, определяющее переход ламинарного режима течения в турбулентное. При этом принимается, что критическое число Рейнольдса для пластины равно $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 3 \cdot 10^6$.

Так как толщина пограничного слоя δ имеет конечную величину, то в пределах ламинарного течения её можно определить зависимостью [1]

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\mathrm{Re}_x^{0,5}}, \qquad (1)$$

где x – продольная координата, $\mathrm{Re}_x = \frac{u \cdot x}{\nu}$; здесь u – скорость набегающего потока, в общем случае является функцией координат x и y; ν – коэффициент кинематической вязкости среды.

Представим зависимость (1) в форме, включающей характерный размер длины пластины l:

$$\frac{\delta}{x} \cdot \frac{l}{l} = \frac{5}{\left(\frac{u \cdot x}{\nu} \cdot \frac{l}{l}\right)^{0,5}}.$$

Отсюда, обозначив $\overline{\delta} = \frac{\delta}{l}$, $\overline{x} = \frac{x}{l}$, получаем

$$\overline{\delta} = \frac{5}{\mathrm{Re}_l^{0,5}} \cdot \overline{x}^{0,5}, \qquad (2)$$

где $\mathrm{Re}_l = \frac{u \cdot l}{\nu}$.

Формула (2) предполагает, что расстояние δ от поверхности пластины $y = 0$ до границы «пограничного слоя» $y = \delta$ – это расстояние, на внешней границе которого продольная скорость течения потока u отличается от скорости невозмущённого потока не более чем на 1 % [1].

Из формулы (2) видно, что максимальная величина $\overline{\delta}$ получается для каждого значения критерия Re_l при координате $\overline{x} = 1$.

Действительно, при $\overline{x} = 1$ минимальному значению критерия Re = 2500 соответствует $\frac{\delta}{l} = 0{,}1$, максимальному $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 3 \cdot 10^6$ соответствует $\frac{\delta}{l} \approx 0{,}003$, т. е. $0{,}003 < \overline{\delta} < 0{,}1$.

Кроме того, формула (2) показывает, что толщина пограничного слоя зависит от критерия Re и падает с ростом последнего.

Таким образом, в силу математических упрощений модель не позволяет охватить диапазон чисел $100 < \mathrm{Re} < 3 \cdot 10^6$.

Однако если в уравнениях Навье – Стокса, записанных в форме уравнения вихревой напряжённости, сохранить все члены и провести линеаризацию его конвективной части, то модель пограничного слоя приобретает дополнительное свойство, позволяющее расширить его возможности и на область чисел 100 < Re < 2500, а теоретически и до числа Re = 25. В этом случае модель пограничного слоя будет работоспособной во всей области чисел $100 < \mathrm{Re} < 3 \cdot 10^6$.

Такое представление уравнения Навье – Стокса предполагает, что $\overline{\delta}$ в области чисел 100 < Re < 2500 лежит в диапазоне $0{,}1 < \overline{\delta} \leq 1$.

Это также определяет тот факт, что значения продольных и поперечных возмущений в диапазоне чисел 100 < Re < 2500 внутри пограничного слоя являются величинами приблизительно одного порядка, хотя и те, и другие по абсолютным значениям малы. Поэтому не учитывать одни, по отношению к другим с физической точки зрения в этой области чисел Re неверно.

Линеаризация, снижая точность результатов решения, позволяет получать хотя и приближённые, но аналитические решения для определённого круга задач гидродинамики.

Все вышеприведённые соображения по гидродинамической модели пограничного слоя относятся и к представлениям тепловой модели пограничного слоя [3]. В последующем будем их характеризовать как гидродинамический пограничный слой, тепловой пограничный слой.

Следует отметить, что для решения задач гидродинамики с учётом теплообмена для области чисел $1 < \mathrm{Re} \leq 100$ Л. И. Кудряшёвым и А. А. Гусаковым была предложена модель «области гидродинамического влияния» [6]. Она нашла отражение также в работах [7; 8]. В работе [9] автором для решения тех же задач и в том же диапазоне чисел Re предложена модель «области влияния».

Предпосылки, на основе которых определялись «область гидродинамического влияния» и «область влияния», не всегда оказывались удовлетворительными. Задачи решались численными методами.

Общим недостатком рассмотренных моделей «областей влияния» стал достаточно узкий диапазон чисел Re.

Вполне понятно, что современные вычислительные методы позволяют решать в рамках уравнений Навье – Стокса и теплообмена задачи любой сложности. Необходимость применения приближённых математических моделей заключается в том, что они позволяют в аналитической форме выявить те или иные закономерности и сопоставить их результаты с результатами точных решений конкретных задач. В работе Гебхарта [10] подчёркивается, что в тех случаях, когда допущения в рамках той, или иной математической модели становятся неприменимы к использованию в заданном диапазоне чисел Re, прямое привлечение численных методов может привести к ошибочным результатам.

Рассмотрим приближённое решение задач обтекания плоской пластины в рамках модели пограничного слоя. Будем рассматривать стационарные течения и полагать, что плотность, вязкость и температуропроводность среды не зависят от температуры.

Модель пограничного слоя для различных чисел Re_l иллюстрируется на рис. 1.

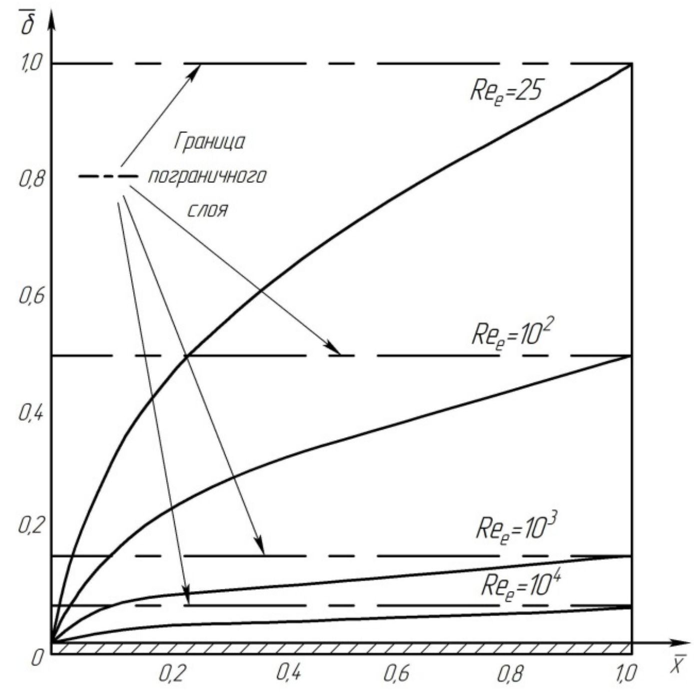

Рис. 1. Модель пограничного слоя при обтекании плоской пластины конечной длины для различных чисел Re_l

Принимается, что отношение $\frac{\delta}{l}$ справедливо в пределах $0{,}003 < \frac{\delta}{l} \leq 1$, где числам $100 < \mathrm{Re}_l < 2500$ соответствует порядок $\frac{\delta}{l} \leq 1$, а числам $2500 < \mathrm{Re}_l < 3 \cdot 10^6$ соответствует порядок $\frac{\delta}{l} \ll 1$.

Из рис. 1 также видно, что с уменьшением критерия Re_l толщина гидродинамического пограничного слоя непрерывно увеличивается по координате *y*.

В рамках модели пограничного слоя на первом этапе рассматривается первая задача об обтекании плоской пластины бесконечной длины в установившемся ламинарном режиме с точки зрения гидродинамического пограничного слоя, на следующем этапе вторая задача о теплообмене при обтекании плоской пластины бесконечной длины с точки зрения теплового пограничного слоя. Так как рассматривается обтекание плоской пластины бесконечной длины, то при решении этих задач принимаем в качестве характерного размера *l* расстояние от передней кромки пластины до точки, где ламинарный режим течения переходит в турбулентный.

Для решения задач используется уравнение Навье – Стокса, записанное в форме уравнения переноса вихрей и уравнение переноса теплоты с учётом диссипации энергии [1].

<u>Уравнение переноса вихрей:</u>

$$\left(u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right), \quad (3)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad (4)$$

где ω – вихревая напряжённость; *v* – поперечная потоку скорость вдоль оси *y*.

К уравнению (1) присоединяется уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Уравнение переноса теплоты с учётом диссипации энергии [1]:

$$\left(u\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)=a\cdot\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}\right)+\frac{\nu}{C_\text{р}}\cdot\Phi. \qquad (6)$$

где a – коэффициент температуропроводности среды; $C_\text{р}$ – удельная теплоёмкость при постоянном давлении; Ф – диссипативная функция; ϑ – разность между температурой T в каждой точке температурного поля вокруг тела, в нашем случае около пластины, и постоянной температурой T_∞ на очень большом расстоянии от тела, для нашей задачи на внешней границе пограничного слоя T_δ (°C), следовательно,

$$\vartheta=(T-T_\infty)=(T-\ T_\delta). \qquad (7)$$

Функция Ф с учётом уравнения неразрывности (5) имеет вид

$$\Phi=2\cdot\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right]^2. \qquad (8)$$

Анализ соотношения (8) с оценкой значимости членов, входящих в функцию Ф в рамках теории подобия, позволяет в последней скобке отбросить первый член по сравнению со вторым как малозначимый. Их отношение даёт величину $\frac{\delta^4}{l^4}$.

Если принять $\frac{\delta}{l}$ = 0,5, то это соответствует значению $\text{Re}_l\sim 100$, исходя из формулы (1).

Таким образом, отбрасывание члена $\frac{\partial v}{\partial x}$ позволяет считать модель теплового пограничного слоя справедливой в диапазоне $100<\ \text{Re}_l<\text{Re}_\text{кр}$.

Рассмотрим решение первой задачи, для чего используем уравнения (3), (4), (5).

Приведём уравнение (3) к безразмерному виду и одновременно осуществим его линеаризацию. Для этого примем

$$u=u_\delta,$$

где u_δ – продольная скорость на внешней границе гидродинамического пограничного слоя.

$$\overline{y}=\frac{y}{\delta},\qquad \overline{\omega}=\frac{\omega}{\omega_0},$$

где $\overline{\omega}$ – относительное значение вихревой напряжённости; ω_0 – вихревая напряжённость в точке $\overline{x}$ = 1 при $\overline{y}=0$.

Зависимость для поперечной скорости возьмём из работы [11] и представим в форме

$$v=-\frac{0{,}865}{{\text{Re}_x}^{0,5}}\cdot u_\delta.$$

Преобразуем её к виду

$$v=-\ \frac{0{,}865}{{\text{Re}_l}^{0,5}}\cdot\frac{u_\delta}{\overline{x}^{0,5}}. \qquad (9)$$

Знак минус перед формулой (9) взят из условия неразрывности (5).

С учётом принятых обозначений соотношение (3) примет вид

$$\left(\frac{\partial\,\overline{\omega}}{\partial\overline{x}}-\frac{0{,}865}{{\text{Re}_l}^{0,5}\cdot\overline{x}^{0,5}}\cdot\frac{l}{\delta}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{y}}\right)=\frac{1}{\text{Re}_l}\cdot\left(\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{l^2}{\delta^2}\cdot\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial\,\overline{y}^2}\right). \qquad (10)$$

Подставим формулу (2) в зависимость (10), получим

$$\left(\frac{\partial\,\overline{\omega}}{\partial\overline{x}}-\frac{0{,}173}{\overline{x}}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{y}}\right)=\frac{1}{\text{Re}_l}\cdot\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{1}{25\cdot\overline{x}}\cdot\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial\,\overline{y}^2}. \qquad (11)$$

Вид полученного соотношения (11) даёт основание воспользоваться при интегрировании принципом независимости изменения $\overline{\omega}$ по $\overline{x}$ и $\overline{y}$. В этом случае последнюю формулу можно представить в виде двух соотношений:

$$\overline{x}\cdot\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial\overline{x}^2}-\overline{x}\cdot\mathrm{Re}_l\cdot\frac{\partial\,\overline{\omega}}{\partial\overline{x}}=\mathrm{Re}_l\cdot\mathrm{C}.$$

$$\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial\,\overline{y}^2}+4{,}325\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{y}}=-25\cdot\mathrm{C},$$

где С – постоянное число, подлежащее определению.

Так как $\mathrm{Re}_l\neq 0$ в диапазоне изменения $0\leq\overline{x}\leq 1$, то первое соотношение при $\overline{x}=0$ будет некорректно при любом значении С, кроме С = 0. Примем С = 0.

Тогда два последних уравнения перепишутся:

$$\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial\overline{x}^2}-\mathrm{Re}_l\cdot\frac{\partial\,\overline{\omega}}{\partial\overline{x}}=0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial\,\overline{y}^2}+4{,}3\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{y}}=0. \tag{13}$$

Рассмотрим каждое из соотношений (12) и (13) по отдельности.

Уравнение (12) имеет решение [12]:

$$\overline{\omega}=c_1\cdot e^{\mathrm{Re}_l\cdot\overline{x}}+c_2, \tag{14}$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования, требующие определения.

Граничные условия:

– при $\overline{x}=0$ и $\overline{y}=0$ $\overline{\omega}=0$;

– при $\overline{x}=1$ и $\overline{y}=0$ $\overline{\omega}=1$ и $\mathrm{Re}_l=\mathrm{Re}_{\text{кр}}$.

С учётом принятых граничных условий коэффициенты c_1 и c_2 определятся в виде

$$c_1=\frac{1}{(e^{\mathrm{Re}_{\text{кр}}}-1)},\qquad c_2=-\frac{1}{\left(e^{\mathrm{Re}_{\text{кр}}}-1\right)}.$$

Подставим полученные значения коэффициентов c_1 и c_2 в формулу (14) получим

$$\overline{\omega}=\frac{(e^{\mathrm{Re}_l\cdot\overline{x}}-1)}{(e^{\mathrm{Re}_{\text{кр}}}-1)}=\overline{\omega}_*. \tag{15}$$

Зависимость (15) определяет вихревую напряжённость вдоль оси $\overline{x}$ от передней кромки пластины до точки, где ламинарный режим течения переходит в турбулентный и одновременно является граничным условием для $\overline{\omega}=\overline{\omega}_*$ во всём диапазоне изменения $0\leq\overline{x}\leq 1$ при $\overline{y}=0$.

Уравнение (13) имеет решение [12]:

$$\overline{\omega}=c_1\cdot e^{-4{,}3\cdot\overline{\overline{y}}}+c_2. \tag{16}$$

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 определяются из граничных условий:

– при $\overline{y}=0$ $\overline{\omega}=\overline{\omega}_*$;

– при $\overline{y}=1$ $\overline{\omega}=0$.

Получаем

$$c_1=-\frac{\overline{\omega}_*}{e^{-4{,}3}-1},\qquad c_2=\frac{e^{-4{,}3}\cdot\overline{\omega}_*}{e^{-4{,}3}-1}.$$

Подставим полученные значения коэффициентов c_1 и c_2 в формулу (16), получим

$$\overline{\omega} = \frac{[e^{4,3\cdot(1-\overline{y})} - 1]}{(e^{4,3} - 1)} \cdot \overline{\omega}_*. \quad (17)$$

Обозначим:

$$f(\overline{x}) = \frac{(e^{\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x}} - 1)}{(e^{\mathrm{Re}_{\text{кр}}} - 1)}, \quad (18)$$

$$f(\overline{y}) = \frac{[e^{4,3\cdot(1-\overline{y})} - 1]}{(e^{4,3} - 1)}. \quad (19)$$

С учётом принятых обозначений (18) и (19) формулы (15) и (17) будут иметь вид

$$\overline{\omega}_* = f(\overline{x}),$$
$$\overline{\omega} = f(\overline{x}) \cdot f(\overline{y}), \quad (20)$$

или

$$\overline{\omega} = \frac{(e^{\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x}} - 1)}{(e^{\mathrm{Re}_{\text{кр}}} - 1)} \cdot \frac{[e^{4,3\cdot(1-\overline{y})} - 1]}{(e^{4,3} - 1)}. \quad (21)$$

Полученные зависимости (20) и (21) справедливы в диапазоне чисел $100 < \mathrm{Re}_l \leq \mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Вид зависимости (21) для случая $\overline{y} = 0$ представлен на рис. 2, а для $\overline{x} = 1$ – на рис. 3.

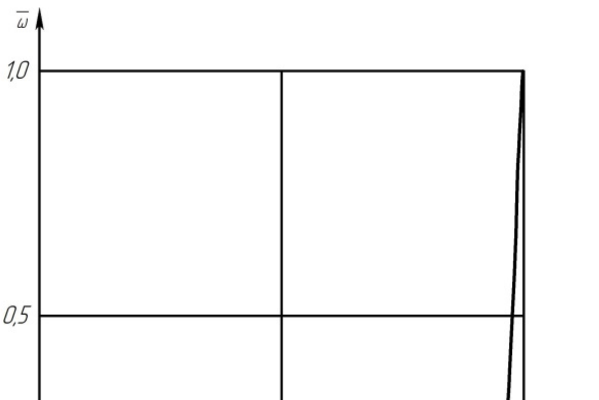

Рис. 2. Зависимость вихревой напряжённости $\overline{\omega}$ от координаты $\overline{x}$ при $\overline{y} = 0$

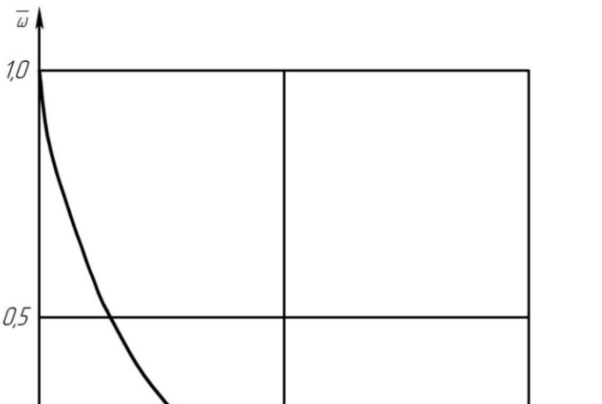

Рис. 3. Зависимость вихревой напряжённости $\overline{\omega}$ от координаты $\overline{y}$ при $\overline{x} = 1$

Определим максимальное вихревое напряжение $\omega_0 = \omega_{\text{кр}}$ в точке $\overline{x} = 1$ при $\overline{y} = 0$.

Воспользуемся формулой (5):

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Примем порядок величин $\frac{\partial U_\delta}{\partial y} \sim \frac{U_\delta}{\delta}$ и $v = -\frac{U_\delta \cdot \delta}{l}$, тогда

$$|\omega| = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{U_\delta \cdot \delta}{l^2} + \frac{U_\delta}{\delta}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_\delta}{l} \cdot \left(\frac{\delta}{l} + \frac{l}{\delta}\right) \cdot \frac{l \cdot \nu}{l \cdot \nu}.$$

Учитывая зависимость (2), получим

$$|\omega| = \frac{\mathrm{Re}_l^{1,5}}{10} \cdot \left(1 + \frac{25}{\mathrm{Re}_l}\right) \cdot \frac{\nu}{l^2}. \tag{22}$$

При $\omega_0 = \omega_{кр}$, что соответствует условию $\overline{x} = 1$, $\mathrm{Re}_l = \mathrm{Re}_{кр}$, тогда

$$|\omega_{кр}| = \frac{\mathrm{Re}_{кр}^{1,5}}{10} \cdot (1 + \frac{25}{\mathrm{Re}_{кр}}) \cdot \frac{\nu}{l^2}.$$

Если учесть, что $\tau = 2 \cdot \omega \cdot \mu$, то, используя зависимость (22), получим

$$\tau = 2 \cdot \frac{\mathrm{Re}_l^{1,5}}{10} \cdot \left(1 + \frac{25}{\mathrm{Re}_l}\right) \cdot \frac{\nu}{l^2} \cdot \rho \cdot \nu. \tag{23}$$

Поделив левую и правую части последнего соотношения на $\rho \cdot u_\delta^2$, проведя простейшие преобразования, будем иметь

$$\frac{\tau}{\rho \cdot u_\delta^2} = \frac{0,2}{\mathrm{Re}_l^{0,5}} \cdot \left(1 + \frac{25}{\mathrm{Re}_l}\right). \tag{24}$$

Зависимость (24) справедлива в диапазоне чисел $100 < \mathrm{Re}_l \leq \mathrm{Re}_{кр}$.

Если принять толщину гидродинамического пограничного слоя как приведённую толщину, в которой происходит полное изменение скорости течения от $u = 0$ при $y = 0$ до $u = u_\delta$ на внешней границе гидродинамического пограничного слоя по линейному закону, то по [11]

$$\frac{\delta}{l} = \frac{3}{\mathrm{Re}^{0,5}}.$$

С учётом этой зависимости получим

$$\frac{\tau}{\rho \cdot U_\delta^2} = \frac{0,333}{\mathrm{Re}_l^{0,5}} \cdot \left(1 + \frac{9}{\mathrm{Re}_l}\right). \tag{25}$$

При больших числах Re_l формула (25) практически совпадает с зависимостью, представленной в работе [11]:

$$\frac{\tau}{\rho \cdot U_\delta^2} = \frac{0,332}{\mathrm{Re}_l^{0,5}}.$$

Зависимость (21) можно существенно упростить, если приближённо принять

$$f(\overline{x}) = \frac{(e^{\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x}} - 1)}{(e^{\mathrm{Re}_{кр}} - 1)} \approx e^{(\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x} - \mathrm{Re}_{кр})}, \qquad f(\overline{y}) = \frac{(e^{4,3 \cdot (1 - \overline{y})} - 1)}{(e^{4,3} - 1)} \approx e^{-4,3 \cdot \overline{y}}. \tag{26}$$

Подставим $f(\overline{x})$ и $f(\overline{y})$ из формул (26) в (21), получим

$$\overline{\omega} \approx e^{(\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x} - \mathrm{Re}_{кр}) - 4,3 \cdot \overline{y}},$$

или

$$\overline{\omega} \approx \exp[\, (\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x} - \mathrm{Re}_{кр}) - 4,3 \cdot \overline{y} \,]. \tag{27}$$

Если принять, что продольная скорость обтекания плоской пластины u_δ по всей длине внешней границы гидродинамического пограничного слоя постоянна и равна скорости невозмущенного потока u_∞, т. е. $u_\delta = u_\infty$, то критерий $\mathrm{Re}_l = \frac{u_\delta \cdot l}{\nu} = \frac{u_\infty \cdot l}{\nu} = \mathrm{Re}_{кр}$. Тогда последняя зависимость (27) примет вид

$$\overline{\omega} \approx \exp\left[\, \mathrm{Re}_{кр} \cdot (\overline{x} - 1) - 4,3 \cdot \overline{y} \,\right].$$

Формула (21) и зависимость (23) показывают, что вихревая напряжённость ω и, соответственно, касательное напряжение τ с ростом координаты $\overline{x}$ растут и при $\overline{x}$ = l достигают максимума.

Возьмём производную от формулы (15) по $\overline{x}$ при $\overline{y}$ = 0, получим

$$\frac{\partial\,\overline{\omega}}{\partial\overline{x}} = \mathrm{Re}_l \cdot \frac{e^{\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x}}}{\left(e^{\mathrm{Re}_{\text{кр}}} - 1\right)} \approx \mathrm{Re}_l \cdot e^{(\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x} - \mathrm{Re}_{\text{кр}})}. \tag{28}$$

Из зависимости (28) видно, что градиент $\frac{\partial\,\overline{\omega}}{\partial x}$ вблизи точки $\overline{x}$ = 0 очень мал ($\frac{\partial\,\overline{\omega}}{\partial x} \approx 0$) и только вблизи точки $\overline{x}$ = 1 резко возрастает.

Из формулы (21) и из рис. 2 видно, что вихревая напряжённость $\overline{\omega}$ практически не меняется по длине пластины вплоть до точки $\overline{x}$ = 1, где ламинарный пограничный слой (ЛПС) внезапно переходит в турбулентный пограничный слой (ТПС). Соответствующим образом ведёт себя и касательное напряжение $\tau = 2 \cdot \omega \cdot \mu$. Оно также резко возрастает в точке $\overline{x} = 1$, что приводит к резкому торможению потока и, соответственно, резкому возрастанию толщины ЛПС.

Так, даже когда $\overline{x}$ = 0,999, т. е. $\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x}$ = 0,999$\cdot \mathrm{Re}_{\text{кр}}$, а $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 3 \cdot 10^5$, вихревая напряжённость $\overline{\omega}$ имеет практически нулевое значение. Таким образом, действительно, только в точке перехода ЛПС в ТПС при $\overline{x}$ = 1 мгновенно возникает вихревой скачок и, соответственно, скачок касательного напряжения τ.

Этот факт экспериментально впервые был выявлен в исследованиях по переходу ЛПС в ТПС И. М. Бюргерсом, Б. Г. ван дер Хегге Цейненом, а также М. Ганзеном в 1924-1928 годах [1]. Их исследования показали, что наиболее характерным признаком при переходе ЛПС в ТПС являются внезапное резкое увеличение толщины пограничного слоя и касательного напряжения на стенке.

Таким образом, зависимость (21) хорошо отражает опытные факты внезапного резкого возрастания касательного напряжения и, соответственно, толщины ЛПС, полученные в экспериментах вышеназванных исследователей [1].

Рассмотрим решение второй задачи о теплообмене при обтекании плоской пластины ламинарным потоком с учётом диссипации энергии за счёт трения.

Воспользуемся соотношением (6) и запишем его с учётом формулы (7) и с одновременной линеаризацией в форме

$$\left(\frac{\partial\,\theta}{\partial\overline{x}} - \frac{0173}{\overline{x}} \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial\overline{y}}\right) = \left(\frac{1}{\mathrm{Pr} \cdot \mathrm{Re}_l} \cdot \frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial\overline{x}^2} + \frac{1}{25 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot \overline{x}} \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial\,\overline{y}^2}\right) + \Phi \cdot \frac{l^2}{\mathrm{Re}_l \cdot C_p \cdot (T_0 - T_\delta)}, \tag{29}$$

где $\theta = \frac{\vartheta}{T_0 - T_\delta} = \frac{T - T_\delta}{T_0 - T_\delta}$ – безразмерная температура; $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}$ – критерий Прандтля; T_0 – температура на поверхности пластины при x = l.

Как показано в работе [11], приближённо можно принять, что

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{\mathrm{Pr}^{1/3}},$$

где δ_t – толщина теплового пограничного слоя.

Учтём также зависимость (2), которую представим в виде

$$\frac{\delta}{l} = \frac{5 \cdot \overline{x}^{0,5}}{\mathrm{Re}_l^{0,5}}.$$

Рассмотрим диссипативную функцию Φ, представленную формулой (8). Для её линеаризации примем

$$\frac{\partial U_\delta}{\partial x} \approx \frac{U_\delta}{l}, \quad \frac{\partial U_\delta}{\partial y} \approx \frac{U_\delta}{\delta_t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Тогда формула (8) преобразуется к виду

$$\Phi = \frac{u_\delta^2}{l^2} \cdot [4 + \frac{0{,}04}{\overline{x}} \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{Re}_l)]. \tag{30}$$

Соответственно, формулу (29) с учётом зависимости (30) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial\,\theta}{\partial\overline{x}} - \frac{0173}{\overline{x}} \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial\overline{y}}\right) = \left(\frac{1}{\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re}_l} \cdot \frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial\overline{x}^2} + \frac{1}{25\cdot\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}\cdot}\overline{x}} \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial\,\overline{y}^2}\right) + \left(k_1 + \frac{k_2}{\overline{x}}\right), \tag{31}$$

где

$$k_1 = \frac{4\cdot u_\delta^2}{\mathrm{Re}_l \cdot C_p \cdot (T_0 - T_\delta)}, \tag{32}$$

$$k_2 = \frac{u_\delta^2}{\mathrm{Re}_l \cdot C_p \cdot (T_0 - T_\delta)} \cdot \left(0{,}04 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{Re}_l\right). \tag{33}$$

Использование метода разделения переменных позволяет соотношение (31) представить в виде двух зависимостей:

$$\frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial\overline{x}^2} - \mathrm{PrRe}_l \cdot \frac{\partial\,\theta}{\partial\overline{x}} = (C - k_1) \cdot \mathrm{PrRe}_l; \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\,\overline{y}^2} + 4{,}3 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial\overline{y}} = -(C\cdot\overline{x} + k_2) \cdot\ 25 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}. \tag{35}$$

В последнем соотношении (35) координата $\overline{x}$ является свободным параметром, примем его равным $\overline{x} = 1$.

Рассмотрим соотношение (34). Решение проводится аналогично решению для $\overline{\omega}$, получаем для граничных условий при $\overline{x} = 0$, $\theta = 0$. При $\overline{x} = 1$, $\theta = 1$ зависимость

$$\theta = -(C -\ k_1) \cdot \overline{x} + (1 + C - k_1) \cdot \frac{\left(e^{\mathrm{PrRe}_l\cdot\overline{x}} - 1\right)}{\left(e^{\mathrm{PrRe}_{\text{кр}}} - 1\right)} = \theta_*. \tag{36}$$

Обозначим величину $\frac{(e^{\mathrm{PrRe}_l\cdot\overline{x}}-1)}{(e^{\mathrm{PrRe}_{\text{кр}}}-1)}$ через $f(\overline{x})$, тогда соотношение (36) примет вид

$$\theta = -(C -\ k_1) \cdot \overline{x} + (1 + C - k_1) \cdot f(\overline{x}) = \theta_*. \tag{37}$$

Рассмотрим зависимость (35), её решение, с учётом граничных условий: при $\overline{y} = 0$, $\theta = \theta_*$; при $\overline{y} = 1$, $\theta = 0$, представляется в виде

$$\theta = [\theta_* - \frac{b}{a} \cdot (C + k_2)] \cdot f(\overline{y}) + \frac{b}{a} \cdot (C + k_2) \cdot (1 - \overline{y}), \tag{38}$$

где

$$f(\overline{y}) = \frac{e^{a\cdot(1-\overline{y})} - 1}{(e^a - 1)}; \quad a = 4{,}3 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}}; \quad b = 25 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}; \quad \frac{b}{a} = \frac{5{,}78}{\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}}. \tag{39}$$

Подставим в формулу (38) зависимость (37), будем иметь

$$\theta = (1 + C - k_1) \cdot f(\overline{x}) \cdot f(\overline{y}) - [(C - k_1) \cdot \overline{x} + \frac{b}{a} \cdot \left(C + k_{2)}\right] \cdot f(\overline{y}) + \frac{b}{a} \cdot (C + k_2)] \cdot (1 - \overline{y}). \tag{40}$$

Положим $C = k_1$, тогда соотношение (40) можно записать в виде

$$\theta = f(\overline{x}) \cdot f(\overline{y}) + \frac{b}{a} \cdot \left(k_1 + k_{2)}\right) \cdot [(1 - \overline{y}) - f(\overline{y})]. \tag{41}$$

Эта формула справедлива в диапазоне чисел $100 < \mathrm{Re}_l < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$.

Рассмотрим в правой части соотношения (41) величину перед квадратной скобкой, обозначим её

$$f_1 = \frac{b}{a} \cdot (k_1 + k_2). \tag{42}$$

С учётом зависимостей (32), (33) и (39) формула (42) может быть преобразована к виду

$$f_1 = \frac{5{,}78}{\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{u_\delta^2}{\mathrm{Re}_l \cdot C_p \cdot (T_0 - T_\delta)} \cdot [4 + {,}004 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{Re}_l)],$$

или

$$f_1 = 0{,}23 \cdot \frac{u_\delta^2 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}}{C_p \cdot (T_0 - T_\delta)} \cdot [1 + \frac{100}{\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{Re}_l)}]. \tag{43}$$

Если в уравнении (43) пренебречь в квадратной скобке последним членом, то получим соотношение, справедливое в диапазоне чисел $1000 < \mathrm{Re}_l < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Запишем это соотношение в форме

$$f_1 = 0{,}23 \cdot \frac{u_\delta^2 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}}{C_p \cdot (T_0 - T_\delta)}.$$

В этом случае зависимость (41) будет иметь вид

$$\theta = f(\overline{x}) \cdot f(\overline{y}) + 0{,}23 \cdot \frac{u_\delta^2 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}}{C_p \cdot (T_0 - T_\delta)} \cdot [(1 - \overline{y}) - f(\overline{y})]. \tag{44}$$

Если учесть, что по формулам (36) и (39)

$$f(\overline{x}) = \frac{(e^{\mathrm{Pr}\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x}} - 1)}{(e^{\mathrm{Pr}\mathrm{Re}_{\text{кр}}} - 1)} \quad \text{и} \quad f(\overline{y}) = \frac{e^{a \cdot (1-\overline{y})} - 1}{(e^a - 1)},$$

то соотношение (44) примет вид

$$\theta = \frac{(e^{\mathrm{Pr}\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x}} - 1)}{(e^{\mathrm{Pr}\mathrm{Re}_{\text{кр}}} - 1)} \cdot \frac{e^{a \cdot (1-\overline{y})} - 1}{(e^a - 1)} + 0{,}23 \cdot \frac{u_\delta^2 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}}{C_p \cdot (T_0 - T_\delta)} \cdot \left[(1 - \overline{y}) - \frac{e^{a \cdot (1-\overline{y})} - 1}{(e^a - 1)}\right]. \tag{45}$$

В случае если не учитывается диссипация тепловой энергии, то формула (45) упрощается и принимает вид

$$\theta = \frac{(e^{\mathrm{Pr}\mathrm{Re}_l \cdot \overline{x}} - 1)}{(e^{\mathrm{Pr}\mathrm{Re}_{\text{кр}}} - 1)} \cdot \frac{e^{a \cdot (1-\overline{y})} - 1}{(e^a - 1)}. \tag{46}$$

Сопоставление формул (21) и (46) указывает на полную аналогию процессов теплообмена и гидродинамики при Pr = 1.

Рассмотрим содержание квадратной скобки полученного выражения (45), обозначим её через $f_2 = [(1 - \overline{y}) - f(\overline{y})]$. Определим те значения $\overline{y} = \overline{y}_*$, при которых функция f_2 для различных чисел Pr принимает максимальные значения. Возьмём производную от функции f_2 по $\overline{y}$ и приравняем её к нулю.

Для этого запишем функцию f_2 с учётом зависимостей (39) в форме

$$f_2 = [(1 - \overline{y}) - \frac{e^{a \cdot (1-\overline{y})} - 1}{(e^a - 1)}.$$

Обозначим $z = a \cdot (1 - \overline{y})$, тогда $f_2 = \left[\frac{z}{a} - \frac{e^z - 1}{(e^a - 1)}\right]$, а её производная равна

$$\frac{df_2}{dz} = \frac{1}{a} - \frac{e^z}{(e^a - 1)} = 0.$$

Отсюда

$$e^z = \frac{(e^a - 1)}{a}, \qquad z = \ln\frac{(e^a - 1)}{a}, \qquad a \cdot \left(1 - \overline{y}_*\right) = \ln\frac{(e^a - 1)}{a}.$$

Если учесть, что $e^a \gg 1$, тогда $\overline{y}_* = 1 - \frac{1}{a} \cdot \ln\frac{(e^a-1)}{a} = 1 - \frac{1}{a} \cdot \ln\frac{e^a}{a}$ и окончательно

$$\overline{y}_* \cong \frac{\ln a}{a}. \tag{47}$$

Расчёты, проведённые по формуле (47) при различных значениях Pr дали следующие результаты: при Pr = 1, $\overline{y}_* = 0{,}34$; Pr = 5, $\overline{y}_* = 0{,}2$; Pr = 8, $\overline{y}_* = 0{,}165$; Pr = 27, $\overline{y}_* = 0{,}126$; Pr = 10^3, $\overline{y}_* = 0{,}0141$.

Из самой формулы (47) видно, что при Pr → ∞, $\overline{y}_* \to 0$.

Зависимость максимальных значений функции $f_3 = \mathrm{Pr}^{1/3} \cdot f_2$ от критерия Pr при $\overline{y} = \overline{y}_*$ даёт следующие величины: при Pr = 1, $f_3 = 0{,}425$; при Pr = 5, $f_3 = 1{,}24$; при Pr = 8, $f_3 = 1{,}554$; при Pr = 27, $f_3 = 2{,}6$; при Pr = 10^3, $f_3 = 9{,}84$.

Полученное уравнение (45) можно рассматривать как сложное распределение температур при обтекании плоской пластины ламинарным потоком среды (жидкости, газа и др.). Представим его в виде $\theta = \theta_1 + \theta_2$, где

$$\theta_1 = \frac{(e^{\mathrm{PrRe}_l \cdot \overline{x}} - 1)}{(e^{\mathrm{PrRe_{кр}}} - 1)} \cdot \frac{e^{a\cdot(1-\overline{y})} - 1}{(e^a - 1)}, \tag{48}$$

$$\theta_2 = 0{,}23 \cdot \frac{u_\delta^2 \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}}{C_p \cdot (T_0 - T_\delta)} \cdot \left[(1 - \overline{y}) - \frac{e^{a\cdot(1-\overline{y})} - 1}{(e^a - 1)}\right]. \tag{49}$$

На рис. 4 представлено распределение температуры θ в области теплового пограничного слоя с учётом диссипации энергии, определённое по формуле (45).

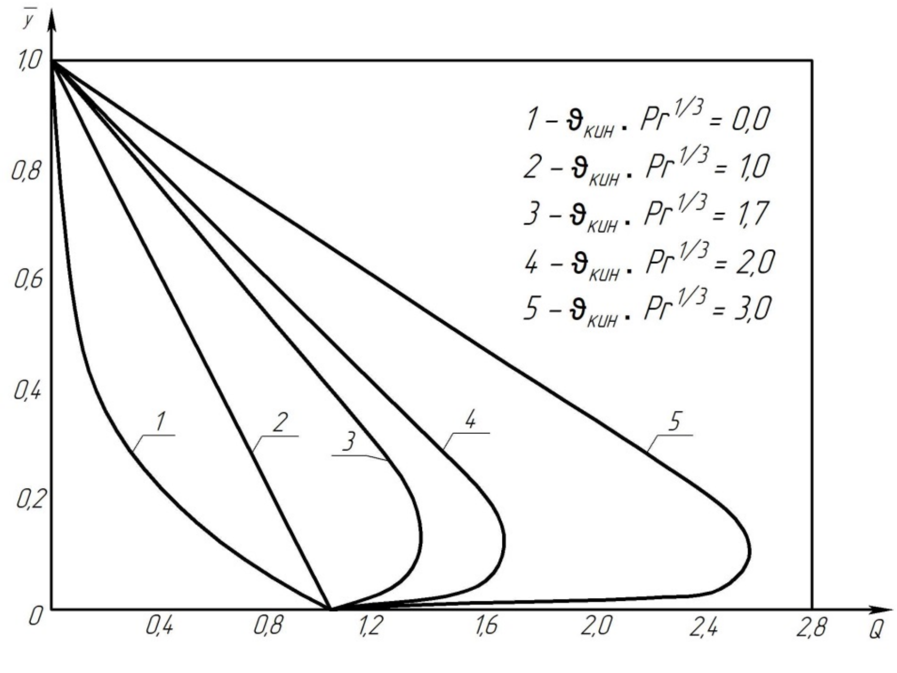

Рис. 4. Распределение температуры θ для заданных чисел Pr в диапазоне $0 \le \overline{y} \le 1$ и $\overline{x} = 1$

При этом условно принято, что величина перед квадратной скобкой зависимости (49) равна

$$0{,}23 \cdot \frac{u_\delta^2}{C_p \cdot (T_0 - T_\delta)} = \vartheta_{\text{кин}} = 1.$$

Это распределение температур складывается из следующих составляющих:

1. распределения температуры θ_1 по координате $\overline{y}$, при $\overline{x}$ = 1, определяемого зависимостью (48) и обусловленного теплопроводностью среды при переносе тепла от поверхности пластины $\overline{y}$ = 0 до границы теплового пограничного слоя $\overline{y}$ = 1 и от передней кромки пластины $\overline{x}$ = 0 до точки перехода ламинарного потока в турбулентный $\overline{x}$ = 1;

2. распределения температуры θ_2 по координате $\overline{y}$, при $\overline{x}$ = 1, определяемого зависимостью (49) и обусловленного выделением и переносом тепла текущей среды в тех же границах теплового пограничного слоя.

В рамках модели теплового пограничного слоя показано, что модель учитывает не только наличие дополнительного переноса тепла и, соответственно, роста θ, но также и изменение координат максимальных значений $y = \overline{y}_*$ в зависимости от значения критерия Pr. При Pr = 1, $\overline{y}_* = 0{,}34$ и далее, по мере роста критерия Pr значение координаты $\overline{y}_*$ уменьшается, как это было показано выше.

Формула (21) показывает, что мы имеем так называемый скачок вихревой напряжённости $\overline{\omega}$ в точке $\overline{x}$ = 1 при $\overline{y} = 0$. Можно предположить, что вблизи этой точки поток резко тормозится и вихри по нормали к поверхности выбрасываются в основной невозмущённый (идеальный) поток.

В этой же точке, согласно соотношениям (45) и (46), наблюдается и температурный скачок.

Здесь мы видим определённую аналогию с обтеканием тела потоком газа при больших скоростях в случае, когда число М = $\frac{v}{a}$ приближается к единице М ≤ 1, т. е. когда скорость звука *a* равна скорости набегающего потока *v*.

При М = 1 возникает «скачок уплотнения», перпендикулярный основному потоку, который формирует так называемое «волновое сопротивление», оно намного больше сопротивления трения и перепада давления.

Для жидкости в качестве аналогии можно противопоставить поведение потока при внезапном поперечном частичном перекрытии потока заслонкой.

Во всех рассматриваемых случаях потоки жидкости и газа внезапно приобретают поперечное основному потоку движение среды в направлении координаты *y*, что и формирует дополнительное сопротивление. Во всех приведённых случаях наблюдается резкое поперечное перемещение частиц жидкости и газа из пограничного слоя в основной невозмущённый (идеальный) поток.

Если исследуется обтекание плоской пластины конечной длины $x = L$, то тогда $\overline{x} = \frac{x}{L}$ и решения будут аналогичны тем, что проведены в рамках первой и второй задач, только максимальное значение критерия $\mathrm{Re}_L = \frac{U_\delta \cdot L}{\nu} = \frac{u_\infty \cdot L}{\nu} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Соответственно, производится только замена критерия $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ на критерий Re_L, а текущее значение $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_{\text{кр}} \cdot \overline{x}$ на $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_L \cdot \overline{x}$ и при $\overline{x}$ = 1 $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_L$.

В работе представлена модель пограничного слоя, позволяющая решать ряд задач гидродинамики и теплообмена в диапазоне чисел $100 < \mathrm{Re}_l < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$.

Дано решение двух задач обтекания плоской пластины бесконечной длины, в которых математически определено, что в точке перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный возникает резкий скачок касательного напряжения и температуры.

Решение задачи о теплообмене выявило особенность, связанную с тем, что с ростом критерия Pr максимальный перепад температуры за счёт диссипационной части теплового потока смещается в сторону поверхности обтекаемой пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1956. – 528 с.
2. Седов, Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1967. – 428 с.
3. Кружилин, Г. Н. Исследование теплового пограничного слоя / Г. Н. Кружилин // ЖТФ. – 1936. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 562-570.
4. Себиси, Т. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы / Т. Себиси, П. Брэдшоу; пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 592 с.
5. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер; пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
6. Кудряшёв, Л. И. О влиянии конвективного теплообмена на теплоотдачу нагретых частиц весьма малого размера / Л. И. Кудряшёв, А. А. Гусаков // Вопросы механики жидкостей и газов. Труды КуАИ: доклады научно-технической конференции. – 1967. – Вып. 24. – С. 29-38.
7. Кудряшёв, Л. И. Теплообмен сферических частиц в области малых чисел Рейнольдса с учётом тепловой нестационарности / Л. И. Кудряшёв, А. А. Гусакова, А. А. Гусаков // Аэромеханика и системы управления. Труды КуАИ. – 1971. – Вып. 35. – С. 42-47.
8. Кудряшёв, Л. И. Приближённое решение задач о теплообмене и сопротивлении при обтекании сферы при числах 1<Re<100 / Л. И. Кудряшёв, А. А. Смирнов, Н. Л. Меньших // Аэромеханика и системы управления. Труды КуАИ. – 1971. – Вып. 35. – С. 28-41.
9. Гусаков, А. А. Аналитическое исследование движения, сопротивления и теплообмена жидкой сферической частицы в вязкой сплошной среде при малых числах Рейнольдса: дис. … канд. техн. наук: / Гусаков А. А. – М., 1966. – 152 л.
10. Гебхарт, Б. Свободно-конвективные течения в технике. Фримановская лекция / Б. Гебхарт // Труды американского общества инженеров-механиков. Теоретические основы инженерных расчетов. – 1979. – № 1. – С. 109-142.
11. Шорин, С. Н. Теплопередача / С. Н. Шорин. – М.: Высшая школа, 1964. – 490 с.
12. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн; пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
13. Колыхалов, Г. А. Влияние тёмной материи на траектории движения космических тел с позиции модели сплошной среды / Г. А. Колыхалов, Е. Г. Кравченко // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2023. – № III (67). – С. 4-11.